Algebra Lineal XXVI: La Regla de Cramer.

José María Rico Martínez
Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica y Electrónica
Universidad de Guanajuato
email: jrico@salamanca.ugto.mx

En estas notas mostraremos la validez de la regla de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Considere un sistema de m ecuaciones con m incógnitas dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= \;= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m &= \;= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mm}x_m &= \;= b_m \end{aligned}$$

Que puede escribirse en forma matricial como

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

donde $A \in \mathbf{M}^m$ es la matriz de coeficientes, $\vec{X} \in \mathbf{R}^m \times m$ es el vector de incógnitas y $\vec{B} \in \mathbf{R}^m$ es el vector de términos independientes.

Teorema. Suponga que $det\, A \neq 0$; es decir la matriz A es no singular o invertible, entonces la $i-$ésima componente del vector de incógnitas está dado por

$$x_i = \frac{det(A_1 \quad A_2 \cdots A_{i-1} \quad \vec{B} \quad A_{i+1} \quad \cdots A_m)}{det\, A}$$

Prueba: El sistema $A\vec{X} = \vec{B}$ puede escribirse como

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{i-1}A_{i-1} + x_iA_i + x_{i+1}A_{i+1} + \cdots + x_mA_m = \vec{B}$$

Entonces, determine

$$
\begin{aligned}
det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, \vec{B}\, A_{i+1}\, \cdots A_m] &= det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, (x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{i-1}A_{i-1} \\
&\quad +x_iA_i + x_{i+1}A_{i+1} + \cdots + x_mA_m)\, A_{i+1}\, \cdots A_m] \\
&= det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, x_1A_1\, A_{i+1}\, \cdots A_m] + \\
&\quad det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, x_2A_2\, A_{i+1}\, \cdots A_m] + \cdots + \\
&\quad det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, x_{i-1}A_{i-1}\, A_{i+1}\, \cdots A_m] + \\
&\quad det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, x_iA_i\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \\
&\quad det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, x_{i+1}A_{i+1}\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \cdots + \\
&\quad det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, x_mA_m\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] \\
&= x_1det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_1\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \\
&\quad x_2det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_2\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \cdots + \\
&\quad x_{i-1}det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_{i-1}\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \\
&\quad x_idet[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_i\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \\
&\quad x_{i+1}det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_{i+1}\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] + \cdots + \\
&\quad x_mdet[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_m\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] \\
&= x_1det[A_1\, A_2\, \cdots\, A_{i-1}\, A_i\, A_{i+1}\, \cdots\, A_m] = x_idetA
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$x_i = \frac{det(A_1 \quad A_2 \cdots A_{i-1} \quad \vec{B} \quad A_{i+1} \quad \cdots A_m)}{det\, A}$$

Es importante señalar las limitaciones de la aplicación de la regla de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. El sistema debe tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir la matriz de coeficientes, A, debe ser cuadrada y, además, $detA \neq 0$, implica que la matriz de coeficientes debe ser no-singular. Es pues evidente la superioridad la generalidad del método de solución de sistemas de ecuaciones mediante el escalonamiento del sistema.

1. Problemas Resueltos.

Problema 1. Considere el sistema lineal dado en forma matricial por

$$M\vec{x} = \vec{b},$$

donde la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes están dados por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resuelva para x_2 y x_4 el sistema de ecuaciones, empleando la regla de Cramer.

Solución. De acuerdo con la regla de Cramer, las soluciones para x_2 y x_4 están dadas por

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

donde el denominador es el determinante de la matriz de coeficientes, M, y su valor está dado, empleando la expansión de Laplace por columnas en base a la tercera columna, por

$$\begin{aligned}
|M| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
& +(-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (2)(6+9+4+6-36+1) + (1)(1+6+60-15+4+6) = 2(-10) + 1(62) = 42
\end{aligned}$$

El numerador para el cálculo de x_2 es el determinante de otra matriz que se denominará M_2, y su determinante, empleando el mismo procedimiento, está dado por

$$\begin{aligned}
|M_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
& +(-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (2)(6-27+1+6-9-3) + (1)(-3-3+15+45+1-3) = 2(-26) + 1(52) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x_2 = \frac{|M_2|}{|M|} = \frac{0}{42} = 0$$

De manera semejante, el numerador para el cálculo de x_4 es el determinante de otra matriz que se denominará M_4, y su determinante, empleando el mismo procedimiento, está dado por

$$\begin{aligned}
|M_4| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
& +(-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2)(6+6+12+18-24+1) + (1)(1+18+12-3+12+6) = 2(19) + 1(46) = 84.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x_4 = \frac{|M_4|}{|M|} = \frac{84}{42} = 2$$

Problema 2. Empleando la regla de Cramer, encuentre las soluciones de x_1 y x_4 en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \\
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3 \\
2x_1 + 6x_2 - 7x_3 - x_4 &= -1 \\
4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Solución. Primero calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Aquí se presentará como calcular este determinante usando las propiedades del determinante, en base a sus columnas. Para tal fín vamos a sumar -3 veces la primera columna a la segunda columna, de manera similar, vamos a sumar 2 veces la primera columna a la tercera columna y -1 vez la primera columna a la cuarta columna. Debe notarse que de acuerdo con las propiedades de los determinantes, vea las notas **Álgebra Lineal XX: Determinantes**, ninguna de estas operaciones afecta el valor del determinante, por lo tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 8 & -6 \\ 2 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -14 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

Después de estos cálculos es posible realizar la expansión del determinante en base a la primera fila, estas expansiones se denominan expansiones de Laplace,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 8 & -6 \\ 2 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -14 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & -3 \\ -14 & 11 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-4)(-3)(1) + (8)(-3)(-14) + 0 - (-14)(-3)(-6) - (11)(-3)(-4) - 0 \\ &= 12 + 336 + 252 - 132 = 468. \end{aligned}$$

Para calcular x_1 aplicando la regla de Cramer se tiene que

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}$$

donde

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Aquí se presentará como calcular este determinante usando las propiedades del determinante, en base a sus filas. Para tal fín vamos a sumar 5 veces la tercera fila a la primera fila, de manera similar, vamos a sumar 3 veces la tercera fila a la segunda fila, debe también notarse que usando la primera columna, sólo se requieren dos de estas operaciones, pues el elemento $4, 1$ es ya cero. Debe notarse que de acuerdo con las propiedades de los determinantes, vea las notas **Álgebra Lineal XXIII: Determinantes de Matrices Transpuestas. Expansión de Determinantes por Columnas**, ninguna de estas operaciones afecta el valor del determinante, por lo tanto

$$\begin{aligned}|A_1| &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 33 & -37 & -4 \\ 0 & 23 & -19 & -6 \\ -1 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 33 & -37 & -4 \\ 23 & -19 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -\left[(33)(-19)(5) + (-37)(-6)(-2) + (-4)(23)(3) - (-2)(-19)(-4) - (3)(-6)(33) - (5)(23)(-37)\right] \\ &= 3135 + 444 + 276 - 152 - 594 - 4255 = -1146\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x_1 = \frac{-1146}{468} = \frac{-191}{78}$$

2. Problemas Propuestos.

Problema 1. Considere el sistema lineal dado en forma matricial por

$$M\vec{x} = \vec{b}$$

donde la matriz de coeficientes es la matriz dada en el Problema 3 de las notas **Álgebra Lineal XIX: Rango de una Matriz y Matriz Inversa**, y que se muestra a continuación

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponga además que

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resuelva el sistema de ecuaciones, empleando la regla de Cramer, y verifique la solución empleando la matriz inversa determinada en **Álgebra Lineal XIX: Rango de una Matriz y Matriz Inversa** notando que

$$\vec{x} = M^{-1}\vec{b}$$